

出勤的概率问题

一个周五的早晨，某位同事乘坐班车忽然发现上座率很低，于是提出了一个问题：假设公司有 40 名员工，他们可以在一年的每个周五选择在家办公，而这样的事情每年最多可以有 15 次，那么平均每个周五有多少人上班呢？

当然，作为一名程序员，最先想到的还是蒙特卡洛方法，写一段程序进行模拟，不过最好还是先在纸上简单运算一次。

首先缩小规模，我们先尝试解决一个小规模的问题：如果公司有 3 名员工，他们可以在 5 天内选择 2 天休息，那么平均每天有多少人上班呢？

某天内，0 人上班的概率是 $P(0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times C_3^0 = 0.064$ (每个人在一天内不上班的概率是 $\frac{2}{5}$ ，这样的情况有 C_3^0 种)

某天内，1 人上班的概率是 $P(1) = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times C_3^1 = 0.288$ (1 个人在一天内上班的概率是 $\frac{3}{5}$ ，另外 2 个人在这天内不上班的概率是 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ，这样的情况有 C_3^1 种)

某天内，2 人上班的概率是 $P(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times C_3^2 = 0.432$ (每个人在一天内上班的概率是 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ，另外 2 个人在这天内不上班的概率是 $\left(\frac{2}{5}\right)$ ，这样的情况有 C_3^2 种)

某天内，3 人上班的概率是 $P(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times C_3^3 = 0.216$ (每个人在一天内上班的概率是 $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ ，这样的情况有 C_3^3 种)

一天内，上班人数的数学期望是 $P(0)*0 + P(1)*1 + P(2)*2 + P(3)*3 = 1.8$

具体描述一次问题：某公司有 t 个人，在 n 天内，必须（注意这里限定了必须）休息 m 天，问平均每天上班的有多少人？

某天内，有 x 人上班的概率是

$$P(x) = \left(\frac{m}{n}\right)^{t-x} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^x \times C_t^x$$

某天内上班人数为

$$\sum_{x=0}^t x \times P(x)$$

当然,作为一个程序员最热爱的应该就是用计算机模拟这样的问题,于是编写了一个程序,模拟人员休假然后进行统计。最后的结果如下:

例子: 公司总共有 3 人, 每人有 2 个休息日, 一共是 5 天 T=3 M=2 N=5

(上面是直接计算, 下面是模拟)

```

C:\Users\Administrator\Documents\Borland Studio Projects\ALquestion\expcl.exe
Input total people number T=
3
Input everyone annual leave day M=
2
Input total days N=
5
1.8000000000000000E+0000

C:\Users\Administrator\Documents\Borland Studio Projects\ALquestion\Voc.exe
Input total people number T=
3
Input everyone annual leave day M=
2
Input total days N=
5
1.8035200000000000E+0000

```

例子: 公司总共有 40 人, 每人有 15 个休息日, 一共是 5 天 T=40 M=15 N=52

(上面是直接计算, 下面是模拟)

```

C:\Users\Administrator\Documents\Borland Studio Projects\ALquestion\expcl.exe
Input total people number T=
40
Input everyone annual leave day M=
15
Input total days N=
52
2.84615384615385E+0001

C:\Users\Administrator\Documents\Borland Studio Projects\ALquestion\Voc.exe
Input total people number T=
40
Input everyone annual leave day M=
15
Input total days N=
52
2.8462920000000000E+0001

```

从时间上来说, 模拟的方法耗时远远高于直接计算。